**УДК 517.944**

# ТРЕХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА. РАЗРЕШИМОСТЬ

***канд. физ.-мат. наук, доц. Н.В. ЦЫВИС***
***(Полоцкий государственный университет)***

*Наиболее полно изучены дифференциально-операторные уравнения первого и второго порядков. Для дифференциально-операторных уравнений высших порядков исследованы задачи с двухточечными краевыми условиями. Здесь для дифференциально-операторных уравнений третьего порядка рассматривается трехточечная задача с однородными условиями, заданными в точках* $t=0$, $t=T_1$, $t=T$. *Функции u и f – функции переменного* $t\in(0,\ T)$, *принимающие значения в гильбертовом пространстве H. С рассматриваемой задачей связано операторное уравнение с областью определения оператора L, включающей в себя условия, накладываемые на функцию u в точках* $t=0$, $t=T_1$ *и* $t=T$. *Методом энергетических неравенств для рассматриваемой задачи устанавливается существование и единственность сильного решения операторного уравнения. Установленная разрешимость и непрерывная зависимость от операторных коэффициентов позволяет предложить приближенный метод решения и установить оценку сходимости.*

## 1. Постановка задачи

На интервале (0, $T$) рассмотрим трехточечную задачу:

$$Lu\equiv\frac{d^3u}{dt^3}+a(t)Au=f(t); \tag{1}$$

$$u(0)=u(T_1)=u(T)=0. \tag{2}$$

Здесь $u$ и $f$ – функции переменного $t\in(0,T)$, принимающие значения в гильбертовом пространстве $H$, норму и скалярное произведение в котором обозначим символами $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ соответственно; $A$ – линейный самосопряженный и положительный оператор в $H$; функция $a(t)$ равна

$$a(t)=\begin{cases}T_1^3, 0\le t\le T_1;\\ -(T-T_1)^3, T_1<t\le T.\end{cases}$$

Отметим, что в этой задаче принципиальным требованием к функции $a(t)$ является то, что в точке $t=T_1$ функция $a(t)$ должна менять знак. Из положительности и самосопряженности оператора $A$ следует, что $\forall v\in D(A)$ справедливо неравенство:

$$(Av,\ v)\ge 0, \tag{3}$$

и при каждом $\rho>0$ оператор $A_\rho=A+\rho I$ имеет на $H$ ограниченный обратный оператор $A_\rho^{-1}$.

Задаче (1), (3) поставим в соответствие оператор $L$ с областью определения $D(L)$, состоящей из функций $u\in L_2((0,\ T),\ H)$ таких, что при почти всех $t\in(0,T)$, $u(t)\in D(A)$, $Au\in L_2((0,T),H)$, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^3u}{dt^3}\in L_2((0,T),H)$ и удовлетворяет условиям (2). Оператор $L$ рассматривается из $E$ в $F$, где $E$ – гильбертово пространство, полученное пополнением множества $D(L)$ по норме:

$$\|u\|_E^2=\int_0^T\left(\frac{\varphi^3(t)}{b(t)}\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2dt+\frac{\varphi(t)}{b(t)}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2+\|u\|^2+\varphi^2(t)(Au,\ u)\right)dt,$$

а $F$ – банахово пространство, полученное пополнением $L_2((0,T),\ H)$ по норме:

$$\|f\|_F=\sup_{v\in E}\frac{\left|\int_0^T(f,\ Mv)dt\right|}{\|v\|_E}.$$

Здесь функция $\varphi(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le T_1 \\ T-t, & T_1<t\le T \end{cases}$ $\qquad b(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{T_1^3}, & 0\le t<T_1 \\ \dfrac{1}{(T-T_1)^3}, & T_1\le t\le T \end{cases}$

Оператор $M$ определяется выражением:

$$Mv=\varphi^3(t)\frac{dv}{dt}-3\varphi^2(t)v\,.$$

Отметим, что оператор $M$ отображает пространство $E$ в множество $M(E)$, плотное в $L_2((0,T),H)$, что необходимо для корректности нормы $\|\cdot\|_F$. Норма в пространстве **F** мажорируется нормой пространства $L_2((0,T),H)$.

Оператор $L$: $E\to F$ с областью определения $D(L)$ допускает замыкание.

Доказательство проводится на основании критерия замыкаемости операторов в банаховых пространствах: необходимо показать, что из того, что $u_n\in D(L)$, $u_n\to 0$ в $E$ и $Lu_n\to f$ в $F$ следует, что $f=0$.

Пусть $\nu(t)$ произвольная достаточно гладкая по $t$ функция, удовлетворяющая условиям (2) и принимающая значения в области определения оператора $A$. Область определения $D(L)$ оператора $L$ такова, что на ней $Lu\in L_2((0,T),H)$, тогда имеем равенство:

$$f(\nu)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^T\frac{d^3u_n}{dt^3}+a(t)Au_n, M\nu\right)dt.$$

Интегрируя по частям первый член правой части данного равенства и используя самосопряженность оператора $A$, а затем при $n\to\infty$, убеждаемся, что $f(\nu)=0$. А так как множество рассматриваемых функций $\nu$ плотно в $E$, то $f=0$.

Символом $\overline{L}$ обозначено замыкание оператора $L$, которое строится следующим образом: функцию $u\in E$ отнесем к области определения $D(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$, если существует последовательность функций $u_n\in D(L)$ и элемент $f\in F$ такие, что $u_n\to u$ в $E$ и $Lu_n\to f$ в $F$. При этом положим, что $\overline{L}u=f=\lim\limits_{n\to\infty}Lu_n$.

Так как элементы графика оператора $\overline{L}$ являются пределами последовательностей элементов графика оператора $L$, то с помощью предельного перехода неравенства (8) из [10], из которого следует, что множество значений $R(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$ замкнуто в $F$, $R(\overline{L})=\overline{R(L)}$.

Так как оператор $\overline{L}$ линейный и для него имеет место неравенство (8) из [10], то на $R(\overline{L})$ существует ограниченный обратный оператор $(L)^{-1}$. Из теоремы о продолжении линейного оператора по непрерывности [11, с. 124] следует равенство: $(\overline{L})^{-1}=(\overline{L^{-1}})$.

**2. Существование сильного решения**

Рассмотрим операторное уравнение:

$$\overline{L}u=f,\quad f\in F. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) называется сильным решением задачи (1) – (3) в пространстве $E$.

Однозначная разрешимость уравнения (4) при любом $f$ или существование и единственность сильного решения задачи (1) – (3) будет установлена, если докажем плотность в пространстве $F$ множества $R(L)$. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия теоремы из [10], тогда множество значений $R(L)$ плотно в $F$.

***Доказательство.*** Так как $F$ – рефлексивное пространство, то плотность $R(L)$ в $F$ равносильна тому, что из равенства

$$\int_0^T(Lu,\ Mv)dt=0\,, \tag{5}$$

$u=D(L)$, следует равенство $v=0$.

Интегрируя по частям в (5) первый член и используя условие (2) для функций $u$ и $v$ получим равенство:

$$\int_0^T\left(\frac{d^2u}{dt^2},\ \varphi^3(t)\frac{d^2v}{dt^2}\right)dt-6\int_0^T\left(\frac{d^2u}{at^2},\varphi(t)\frac{dv}{dt}\right)dt=\int_0^T(Au,\ Mv)dt. \tag{6}$$

Предельным переходом равенство (6) распространим на такие $u\in L_2((0,T),\ H)$ и $u(t)$ удовлетворяет условиям (2). После этого в равенство (6) положим $u=(A_\rho^{-1})(A_\rho^{-1})v$, где $v$ из равенства (5), а $A_\rho=A+\rho\cdot I$, $\rho\ge 0$ и получим равенство:

$$\int_0^T\varphi^3(t)\left\|\frac{d^2A_\rho^{-1}v}{dt^2}\right\|^2dt+6\int_0^T\varphi(t)\left\|\frac{dA_\rho^{-1}v}{dt}\right\|^2dt=-\frac{7}{2}\int_0^T(AA_\rho^{-1}v,\ A_\rho^{-1}v)dt. \tag{7}$$

Так как правая часть равенства (6) не положительна, то из равенства (6) вытекает неравенство:

$$\int_0^T\varphi^3(t)\left\|\frac{d^2A_\rho^{-1}v}{dt^2}\right\|^2dt+\int_0^T\varphi(t)\left\|\frac{dA_\rho^{-1}v}{dt}\right\|^2dt\le 0$$

из которого заключаем, что $A_\rho^{-1}v=0,$ и тем самым $v=0$.

**Заключение.** Установлена корректная разрешимость уравнения (4) при любом $f\in F$. Отметим, что метод энергетических неравенств и доказанная корректная разрешимость уравнения (4) позволяют установить непрерывную зависимость решений от операторных коэффициентов, а непрерывная зависимость от операторных коэффициентов для дифференциально-операторных уравнений является более общим результатом, чем непрерывная зависимость от коэффициентов для уравнений с частными производными. Установленная разрешимость и непрерывная зависимость решений от операторных коэффициентов позволяют предложить приближённый метод решения рассматриваемой задачи и установить оценку сходимости.

ЛИТЕРАТУРА


1. Абдо, С.А. Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки / С.А. Абдо, Н.И. Юрчук // Диф. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 3. – С. 417 – 425.
2. Горбачук, В.И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – Киев: Наук. думка, 1984. – 280 с.
3. Дезин, А.А. Операторы с первой производной по «времени» и нелокальные условия / А.А. Дезин // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61 – 86.
4. Чесалин, В.И. Задача с нелокальными условиями для абстрактных уравнений Лява / В.И. Чесалин, Н.И. Юрчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1973. – № 6. – С. 30 – 39.
5. Юрчук, Н.И. Априорные оценки решений граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений / Н.И. Юрчук // Диф уравнения. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 729 – 739.
6. Юрчук, Н.И. Разрешимость граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений / Н.И. Юрчук // Диф. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 4. – С. 626 – 636.
7. Цывис, Н.В. Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений третьего порядка / Н.В. Цывис, Н.И. Юрчук // Диф. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 5. – С. 872 – 877.
8. Цывис, Н.В. Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка / Н.В. Цывис. – Деп. в ВИНИТИ 10.08.87, № 580 Л. – В. 87.
9. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
10. Цывис, Н.В. Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений третьего порядка. Априорные оценки / Н.В. Цывис // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2006. – № 4. – С. 36 – 39.
11. Кантарович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Кантарович, Г.Г. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.


*Поступила 02.02.2009*